令和４年度第１次募集（令和３年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は，９：００～１１：００ です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 下書きは，問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

問題 1

$a, b, c > 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) xy 平面内において，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) xyz 空間内において，楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ で囲まれた図形の体積を求めよ。

(3) xyz 空間内において，連立不等式

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{z}{c} \end{cases}$$

の表す図形の体積を求めよ。

$\boxed{\text{問題}\quad 2}$

行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ $(0 < a < 1,\ 0 < b < 1)$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値を求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求め，A を対角化せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ。

問題　3

次の問いに答えよ。

(1) X を距離空間とする。連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ について，$\bigl\{x\in X \mid f(x)>0\bigr\}$ は X の開集合であることを示せ。

(2) (X,d_X)，(Y,d_Y) を距離空間とする。全射な写像 $f:X\to Y$ について，ある $r,s>0$ が存在して，すべての $x,y\in X$ に対して

$$r\,d_Y\bigl(f(x),f(y)\bigr)\le d_X(x,y)\le s\,d_Y\bigl(f(x),f(y)\bigr)$$

が成り立つならば，f は同相写像となることを示せ。

問題 4

G を可換群とし，H_1 と H_2 を G の部分群とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) H_1 と H_2 は G の正規部分群であることを示せ。

(2) $H_1 \cap H_2$ は G の正規部分群であることを示せ。

(3) $H_1 \cup H_2$ が G の部分群であるとき，$H_1 \subseteqq H_2$ または $H_2 \subseteqq H_1$ となることを示せ。

(4) $H_1 \cup H_2 = G$ かつ $H_2 \neq G$ が成り立つとき，$H_1 = G$ となることを示せ。

問題　5

3次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$内の曲線$\mathbf{p}(t) = \left(t^2, t + \dfrac{t^3}{3}, t - \dfrac{t^3}{3}\right)$ $(-\infty < t < \infty)$をCで表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線Cの単位接ベクトルを求めよ。

(2) 曲線Cの$0 \leqq t \leqq 1$の部分の長さを求めよ。

(3) 曲線Cの曲率を求めよ。

問題　6

次の線形計画問題について考える。

$$
\textbf{(LP)}\left\{\begin{array}{lccccccc}
\text{最小化} & 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 5x_4 & & & & & & \\
\text{制約条件} & 2x_1 & & +3x_3 & +6x_4 & = & 8 \\
 & x_1 & & +x_3 & +2x_4 & = & 3 \\
 & & 2x_2 & +x_3 & +x_4 & \geqq & 4 \\
 & \multicolumn{6}{c}{x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0, \quad x_4 \geqq 0} & \\
\end{array}\right.
$$

次の問いに答えよ。

(1) 変数 x_1 に非負条件がついていないことに注意して問題 (LP) を標準形に変形し，シンプレックス法で最適解と最小値を求めよ。

(2) 問題 (LP) の双対問題 (D) を記述せよ。

(3) (2) で求めた双対問題 (D) の実行可能解の領域と目的関数の等高線を図示して最適値を求め，(1) の最適値と比較せよ。